

$$-\frac{m-1}{3m+9}.$$

$$\because l_1 \perp l_2$$

$\therefore (-\frac{m+3}{m-1})(-\frac{m-1}{3m+9})=-1$, 化简得 $\frac{1}{3}=-1$, m 无解, 故 l_1 与 l_2 不垂直.

分析总结:

实际上, 上述解法是假设斜率已经存在, 而当斜率不存在时的情况未作分析, 导致两直线不垂直的错误结论.

对于两直线互相垂直的问题, 宜用“两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ ($i=1, 2$) 垂直的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2=0$ ”, 这样避免斜率是否存在讨论. 根据两直线的方程判断两直线的位置关系时, 要特别注意斜率是否存在, 对于斜率不存在的情况要单独考虑, 注意斜率相等并不是两直线平行的充要条件, 斜率互为负倒数也不是两直线垂直的充要条件.

再试身手

如果直线 $(m+4)x+(m^2+6m+8)y=m+4$ 与 y 轴平行, 求实数 m 的值.

[答案] $m=-2$.

4. 过定点的直线系问题

例 8. 求证: m 为任意实数时, 直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 必过定点.

无论实数 m 怎样变化, 直线必过某一定点, 此题如何求出? 有些学生只会求出但不怎么理解. 其主要原因是多变量的环境无法用运动变化的观点来把次元变为主元考虑, 对这一做法不完全理解. 下面给出正解.

证明: 将原方程按 m 的降幂排列, 整理得:

$$(x+2y-1)m+(x+y-5)=0.$$

此式对 m 的任意实数值都成立, 根据恒等式的要求, m

的一次项系数与常数项等于零, 故有 $\begin{cases} x+2y-1=0, \\ x+y-5=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=9, \\ y=-4. \end{cases}$

$\therefore m$ 为任意实数时, 所对应的直线必通过定点 $(9, -4)$.

分析总结:

在有关曲线过定点的问题中, 无论曲线系中的参数如何变化, 定点坐标均满足方程. 因此, 对参数而言, 原方程是恒等式, 根据恒等式原理可以求出直线系所过定点的坐标.

常见直线系方程的两种形式:

(1) 过定点的直线系: $y-y_1=k(x-x_1)$, (k 为变量, $A(x_1, y_1)$ 为定点);

(2) 过两直线交点的直线系: 直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, 直线 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, 则过 l_1 与 l_2 交点的直线系: $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 其中该式不包括直线 l_2 .

再试身手

方程 $(1+4k)x-(2-3k)y+2-14k=0$ 所确定的直线必经过点 ()

A. $(2, 2)$ B. $(-2, 2)$ C. $(-6, 2)$ D. $(3, -6)$

[答案] A.

不怕错, 错后出真知. 在直线与方程的学习中, 只要我们做到对基本知识、基本方法、基本技能多一些理解, 在实践中遇错能纠, 反思求真, 就能提高分析问题与解决问题的能力, 提高数学的应用水平.

责任编辑 徐国坚